

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2 Семестр

Раздел 1 Системы линейных алгебраических уравнений. Линейные пространства и линейные операторы

1.1 Контрольная работа (к.р) - 8 Неделя

КР-8

В а р и а н т 1

I. Дана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 1 \\ 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \end{cases}$$

- 1) Доказать, что она совместна.
- 2) Найти ФСР соответствующей однородной системы.
- 3) Найти общее решение данной системы.

II. Даны векторы: $x_1 = \{1, -1, 3, 0\}$, $x_2 = \{5, -3, 3, 2\}$, $x_3 = \{-1, -1, 9, -2\}$, $x_4 = \{7, -3, -3, 4\}$.

- 1) Найти размерность линейной оболочки L , порожденной этими векторами.
- 2) Найти какой-нибудь базис этой линейной оболочки.
- 3) Заданные векторы разложить по найденному базису.

III. В линейном пространстве \mathbf{R}^2 заданы два базиса: $[e] = \{e_1, e_2\}$ и $[f] = \{f_1, f_2\}$, где $e_1 = \{1, 2\}$, $e_2 = \{0, 1\}$, $f_1 = \{-1, 1\}$, $f_2 = \{3, 3\}$; и вектор $x = \{6, 18\}$ в базисе $[e]$.

- 1) Найти матрицу перехода T от базиса $[e]$ к базису $[f]$.
- 2) Найти координаты вектора x в базисе $[f]$.

IV. В линейном пространстве P_2 (многочленов степени не выше двух) задан оператор \mathcal{A} , действующий на элемент x из P_2 по формуле:

$$\mathcal{A}x \equiv (0,5t)x'' - x' + 2x.$$

- 1) Доказать, что \mathcal{A} - линейный оператор.
- 2) Выписать матрицу $A_{[e]}$ оператора \mathcal{A} в базисе $[e] = \{1, t, t^2\}$.
- 3) Является ли оператор \mathcal{A} обратимым?

V. В базисе $[e] = \{e_1, e_2, e_3\}$ линейного пространства V линейный оператор \mathcal{A} имеет матрицу

$$A_{[e]} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 5 & 3 & 5 \\ -5 & -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Выписать матрицу $A_{[e']}$ оператора \mathcal{A} в базисе $[e'] = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, где $e'_1 = -e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 + e_2 - e_3$.

Код	Вид оценочного средства	Критерии	Оценка в баллах	Минимальный балл – максимальный балл
к.р-8	Контрольная работа № 1	решено [90,100]% заданий из контрольной работы	23-25	15 – 25
		решено [70,90)% заданий из контрольной работы	18-22	
		решено [60,70)% заданий из контрольной работы	15-17	
		решено [0,60)% заданий из контрольной работы	0 - 14	0 – 14

Раздел 2 Евклидовы пространства. Линейные операторы в евклидовых пространствах.

2.1 Контрольная работа (к.р) - 15 Неделя

Контрольная работа - 15

В а р и а н т 1

1. Привести к каноническому виду уравнение

$$8x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 16y - 16 = 0.$$

Установить, какой геометрический образ оно определяет, изобразить этот образ в исходной системе координат, а также оси других координатных систем, которые вводятся по ходу решения.

2. Привести уравнение

$$4x^2 + 9y^2 + 24x - 18y - 36z + 261 = 0$$

к каноническому виду и определить, какую поверхность оно описывает.

3. Классифицировать относительно параметра m линии, заданные уравнением

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 2mx - 12y - m + 2 = 0.$$

Код	Вид оценочного средства	Критерии	Оценка в баллах	Минимальный балл – максимальный балл
к.р-15	Контрольная работа № 2	решено [90,100]% заданий из контрольной работы	23-25	15 – 25
		решено [70,90)% заданий из контрольной работы	18-22	
		решено [60,70)% заданий из контрольной работы	15-17	
		решено [0,60)% заданий из контрольной работы	0 - 14	0 – 14

2 Семестр

Экзамен

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ

I. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Основные понятия для СЛАУ. Теорема Крамера.
2. Метод Гаусса решения СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли, ее следствие и геометрическая интерпретация.
3. Однородные СЛАУ (ОСЛАУ). Свойства решений ОСЛАУ. Критерий наличия ненулевых решений.
4. Общее решение ОСЛАУ, теорема о его структуре.
5. Фундаментальная система решений (ФСР) ОСЛАУ, теорема о структуре общего решения ОСЛАУ через ФСР.
6. Неоднородные СЛАУ. Общее решение неоднородной СЛАУ.

II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

7. Основные понятия, свойства и примеры линейных пространств.
8. Линейная зависимость и независимость системы элементов линейного пространства. Критерий линейной зависимости.
9. Базис и размерность линейного пространства. Теорема о размерности линейного пространства.
10. Матрица перехода от одного базиса к другому. Преобразование координат элемента при переходе к новому базису.
11. Основные понятия и примеры линейных подпространств. Линейная оболочка. Теорема о размерности линейной оболочки. Теорема о неполном базисе.
12. Пересечение, сумма и прямая сумма линейных подпространств линейного пространства. Критерий представления пространства в виде прямой суммы линейных подпространств и его следствия.
13. Основные понятия, свойства и примеры линейных операторов.
14. Матрица линейного оператора в заданном базисе. Теорема о взаимосвязи линейного оператора и его матрицы. Теорема о координатах образа линейного оператора.
15. Операции над линейными операторами. Линейное пространство линейных операторов, теорема о его размерности.
16. Свойства линейных операторов и их матриц.
17. Обратный оператор. Критерий обратимости и его следствия. Примеры.
18. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Инвариантность определителя матрицы линейного оператора. Критерий линейной зависимости системы элементов линейного пространства.
19. Ядро и образ линейного оператора. Теоремы о размерности образа и ядра линейного оператора.
20. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. Характеристическое уравнение. Критерий.
21. Свойства собственных чисел и собственных векторов линейного оператора.
22. Диагонализуемость линейного оператора. Критерии.

III. ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

23. Основные понятия, простейшие свойства и примеры евклидовых и унитарных пространств.

24. Неравенство Коши-Буняковского. Неравенство треугольника.
25. Общий вид скалярного произведения в евклидовом и унитарном пространствах. Матрица Грама.
26. Ортонормированные базисы в евклидовом и унитарном пространствах. Процесс ортогонализации по Шмидту.
27. Ортогональное дополнение подпространства евклидова (унитарного) пространства. Теорема о представлении евклидова (унитарного) пространства в виде прямой суммы линейных подпространств.
28. Определение, примеры и общий вид линейной формы в евклидовом и унитарном пространствах.
29. Билинейные и полуторалинейные формы, их матрицы в заданном базисе.
30. Квадратичные формы в евклидовом пространстве. Матрица квадратичной формы в заданном базисе и ее преобразование при переходе к новому базису. Инвариантность знака определителя матрицы квадратичной формы.
31. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема Якоби (без доказательства).
32. Закон инерции квадратичных форм.
33. Классификация квадратичных форм в евклидовом пространстве.
34. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм.
35. Сопряженный оператор и его матрица.
36. Свойства сопряженного оператора.
37. Нормальные операторы в евклидовом и унитарном пространствах и их свойства. Нормальные матрицы.
38. Самосопряженные операторы в евклидовом и унитарном пространствах и их свойства. Эрмитово симметричные матрицы.
39. Унитарные операторы в унитарном пространстве и ортогональные операторы в евклидовом пространстве и их свойства.
40. Унитарные и ортогональные матрицы и их свойства.
41. Спектральные теоремы для нормальных операторов и нормальных матриц.
42. Спектральные теоремы для самосопряженных операторов и эрмитово симметричных матриц.
43. Спектральные теоремы для унитарных операторов и унитарных матриц.
44. Приведение эрмитовой квадратичной формы к каноническому виду.

В экзаменационный билет включаются 2-3 вопроса из вышеприведенного списка экзаменационных вопросов, например:

ПРИМЕРНЫЙ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ

1. Линейная зависимость и независимость системы элементов линейного пространства. Критерий линейной зависимости и его следствия.
2. Закон инерции квадратичных форм.
3. Спектральные теоремы для нормальных операторов и нормальных матриц.

Методика оценки результатов сдачи зачета

Максимальная сумма баллов за зачет – 50.

«ОТЛИЧНО» (45-50 баллов) - студент владеет знаниями предмета в соответствии с рабочей программой, достаточно глубоко осмысливает дисциплину; самостоятельно, в логической последовательности и исчерпывающе отвечает на вопрос, четко формулирует ответ и решает задачу в полном объеме.

«ХОРОШО» (35-44 баллов) - студент владеет знаниями дисциплины почти в полном объеме программы (имеются пробелы знаний только в некоторых, особенно сложных разделах);

самостоятельно и отчасти при наводящих вопросах дает полноценный ответ на вопрос; не допускает серьезных ошибок при решении задачи.

«УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО» (30-34 баллов) - студент владеет основным объемом знаний по дисциплине; проявляет затруднения в самостоятельных ответах, оперирует неточными формулировками; в процессе ответов допускаются ошибки по существу вопросов; способен решать задачу не в полном объеме.

«НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО» (ниже 30 баллов) - студент не освоил обязательного минимума знаний предмета; не способен ответить на вопрос даже при дополнительных наводящих вопросах экзаменатора; не может решить задачу.